Πρόχειρες σημειώσεις διαλέξεων

12η Εβδομάδα

§ 3. Σχεδόν γραμμικά συστήματα

Θα εξετάσουμε τώρα τα μη γραμμικά συστήματα

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}), \tag{3.1}$$

όπου η $\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})$ είναι της κλάσεως C^1 στην ϵ-περιοχή της αρχής των αξόνων. Όπως και προηγουμένως, θα διερευνήσουμε την συμπεριφορά των τροχιών του συστήματος (3.1) κοντά στο σημείο ισορροπίας $\mathbf{x} \equiv 0$. Προφανώς το μηδέν πρέπει να είναι λύση του (3.1) άρα

$$\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{0}) = 0.$$

Θα μελετήσουμε το σύστημα (3.1), προσεγγίζοντάς το με ένα κατάλληλο γραμμικό σύστημα. Καταρχήν θα δούμε τη σημαίνει για ένα μη γραμμικό σύστημα τύπου (3.1) να είναι "*κοντά*" σε ένα γραμμικό. Υποθέτουμε ότι η $\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})$ στην ϵ-περιοχή της αρχής των αξόνων μπορεί να γραφτεί σε μορφή

$$\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{R}(t, \mathbf{x}),$$

όπου $\mathbf{A}$ είναι πίνακας με σταθερούς συντελεστές. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{3.2}$$

Για να είναι το μη γραμμικό σύστημα

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{R}(t, \mathbf{x}) \tag{3.3}$$

"*κοντά*" στο σύστημα (3.2), πρέπει να υποθέσουμε ότι ο όρος $\mathbf{R}(t, \mathbf{x})$ είναι "*μικρός*", δηλαδή ικανοποιεί την συνθήκη

$$\frac{\|\mathbf{R}\|}{\|\mathbf{x}\|} \to 0 \text{ καθώς } \mathbf{x} \to 0 \tag{3.4}$$

ομοιόμορφα ως προς t όταν $t \geq t_0$ για κάποιο t_0. Ένα τέτοιο σύστημα (3.3) ονομάζεται *σχεδόν γραμμικό.*

Το σύστημα (3.2) ονομάζεται *σύστημα πρώτης προσέγγισης* για το σύστημα (3.3). Αφού υποθέτουμε ότι ο μη γραμμικός όρος είναι μικρός σε σύγκριση με το γραμμικό όρο, όταν το $\mathbf{x} \to 0$, είναι λογικό να ελπίζουμε ότι οι τροχιές του γραμμικού συστήματος μας δίνουν καλή προσέγγιση των λύσεων του μη γραμμικού στην ϵ-περιοχή της αρχής των αξόνων.

Θεώρημα 3.1. *Υποθέτουμε ότι το σύστημα (3.1) μπορεί να γραφτεί σε μορφή (3.3), όπου $\mathbf{R}(t, \mathbf{x})$ ικανοποιεί την (3.4). Αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A}$ έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x} \equiv 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για το σύστηματα (3.1).*

Αν τουλάχιστον μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχει θετικό πραγματικό μέρος, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι εκτός του περιεχόμενου του συγγράμματος, θα επισημάνουμε μόνο ότι βασίζεται στην κατασκευή της κατάλληλης συνάρτησης $Lyapunov$. Με συναρτήσεις $Lyapunov$ θα ασχοληθούμε στην επόμενη παράγραφο.

Παρατήρηση 3.1. Το θεώρημα δεν μπορεί να εφαρμοστεί αν τουλάχιστον μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχει πραγματικό μέρος ίσο με το μηδέν.

Υπάρχει απλός τρόπος κατασκευής του σηστήματος (3.3) χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα $Taylor$ (ως προς $\mathbf{x}$). Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} \Phi_1(t,\mathbf{x}) &= \Phi_{1x_1}(t,\mathbf{0})x_1 + \cdots + \Phi_{1x_n}(t,\mathbf{0})x_n + R_1(t,\mathbf{x}), \\ \Phi_2(t,\mathbf{x}) &= \Phi_{2x_1}(t,\mathbf{0})x_1 + \cdots + \Phi_{2x_n}(t,\mathbf{0})x_n + R_2(t,\mathbf{x}), \\ &\cdots \\ \Phi_n(t,\mathbf{x}) &= \Phi_{nx_1}(t,\mathbf{0})x_1 + \cdots + \Phi_{nx_n}(t,\mathbf{0})x_n + R_n(t,\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Εδώ λάβαμε υπόψη ότι $\mathbf{\Phi}(t,\mathbf{0}) = 0$, αφού υποθέτουμε ότι $\mathbf{x} \equiv 0$ είναι λύση του σηστήματος. Προφανώς η συνθήκη (3.4) επαληθεύεται. Άρα έχουμε

$$\mathbf{\Phi}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{R}(t,\mathbf{x}).$$

με

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Phi_{1x_1}(t,\mathbf{0}) & \cdots & \Phi_{1x_n}(t,\mathbf{0}) \\ \Phi_{2x_1}(t,\mathbf{0}) & \cdots & \Phi_{2x_n}(t,\mathbf{0}) \\ \cdots & & \\ \Phi_{nx_1}(t,\mathbf{0}) & \cdots & \Phi_{nx_n}(t,\mathbf{0}) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα (3.1) αν ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι με σταθερούς συντελεστές και όλες οι ιδιοτιμές του έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x} \equiv 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και για τα δυο. Αν τουλάχιστον μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχει θετικό πραγματικό μέρος, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές. Αν το σύστημά μας είναι αυτόνομο ($\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$), τότε προφανώς ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι με σταθερούς συντελεστές.

Παράδειγμα 3.1. Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = x - y + x^2 + y^2 \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = x + y - y^2.$$

Λύση. Εδώ

$$\Phi_1(t,x,y) = x - y + x^2 + y^2 \sin t,$$
$$\Phi_2(x,y) = x + y - y^2.$$

Άρα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και ο μη γραμμικός όρος του συστήματος είναι

$$\mathbf{R} = (R_1, R_2) = (x^2 + y^2 sin\, t, -y^2).$$

Παρατηρούμε ότι εδώ το δευτερο μέρος είναι ήδη γραμμένο σε ζητούμενη μορφη (3.5). Συνεπώς το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα θα πάρει τη μορφή

$$\frac{dx}{dt} = x - y,$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow k^2 - 2k + 2 = 0, \quad k_{1,2} = 1 \pm i.$$

Επομένως το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

Παράδειγμα 3.2. Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8sin\, y,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 - e^x - 3y - cos\, y.$$

Λύση. Έχουμε

$$\Phi_1(x,y) = 2x + 8\sin y = 2x + 8(y - y^3/3! + \cdots) = 2x + 8y + R_1,$$

$$\Phi_2(x,y) = 2 - e^x - 3y - \cos y = 2 - (1 + x + x^2/2 + \cdots) - 3y - (1 - x^2/2 + \cdots) =$$
$$-x - 3y + R_2,$$

άρα ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι ο εξής

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

και τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του είναι $-1/2$, άρα έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια.

Προφανώς μπορούμε να βρούμε τον πίνακα $\mathbf{A}$ κατευθείαν από τον τύπο (3.6). $\star$

Όπως είχαμε αναφέρει η μέθοδος αυτή δεν μας δίνει πάντα το αποτέλεσμα, ακόμα και σε απλές περιπτώσεις.

Παράδειγμα 3.3. Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας για την εξίσωση (μαθηματικό εκκρεμές)

$$x'' + sinx = 0.$$

Λύση. Ανάγουμε την εξίσωση σε σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x.$$

Εδώ ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι ο εξής

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

και οι ιδιοτιμές $\pm i$, άρα το Θεώρημα 3.1 δεν μπορεί να δώσει απάντηση. Θα την δώσουμε στην επόμενη παράγραφο (βλ. Παράδειγμα 4.6).

Παράδειγμα 3.4. Εξετάστε την ευστάθεια της λύσης $x = 1$, $y = -1$ για το σήστημα:

$$x' = e^{2+y-x} + y,$$

$$y' = x + xy.$$

Λύση. Για $\xi = x - 1$ και $\eta = y + 1$ έχουμε

$$\xi' = e^{\eta - \xi} + \eta - 1,$$

$$\eta' = \eta + \xi\eta.$$

μελετάμε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας για το καινούργιο σύστημα. Έχουμε

$$\Phi_1(\xi,\eta) = e^{\eta-\xi} + \eta - 1,$$
$$\Phi_2(\xi,\eta) = \eta + \xi\eta.$$

προφανώς $\Phi_{1\xi}(0,0) = -1$, $\Phi_{1\eta}(0,0) = 2$, $\Phi_{2\xi}(0,0) = 0$, $\Phi_{2\eta}(0,0) = 1$, άρα ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι ο εξής

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και οι ιδιοτιμές του είναι $\pm\sqrt{3}$, άρα έχουμε αστάθεια. ⋆

§ 4. Μη γραμμικά συστήματα, συνάρτηση *Lyapunov*

Θα περάσουμε τώρα σε μια άλλη μέθοδο διερεύνησης της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας, που ονομάζεται δεύτερη μέθοδος του *Lyapunov* ή άμεση μέθοδος.

Θεώρημα 4.1(*Lyapunov*). *Έστω ότι υπάρχει μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathcal{V}(\mathbf{x})$, η οποία σε μια ϵ-περιοχή το σημείου $\mathbf{x} = 0$ ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες*
1. $\mathcal{V} \geq 0$ και $\mathcal{V} = 0$ μόνο όταν $\mathbf{x} = 0$,
2. υπάρχει t_0 τ.ω. για $t \geq t_0$

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_k}\Phi_k(t,\mathbf{x}) \leq 0, \tag{4.1}$$

τότε το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x} \equiv 0$ είναι ευσταθές.

Πριν περάσουμε στην απόδειξη ας κάνουμε μερικές παρατηρήσεις. Η συνάρτηση $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ ονομάζεται συνάρτηση του *Lyapunov*. Στην συνθήκη (4.1) την παράγωγο της $\mathcal{V}$ ως προς t την παίρνουμε κατά μήκος της τροχιάς του συστήματος. Πράγματι

$$\frac{d}{dt}\mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}. \tag{4.2}$$

Αν $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ ικανοποιεί το σύστημα (0.1), δηλαδή είναι τροχιά του συστήματος (0.1), τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις παραγώγους των $x_k(t)$ ως προς t στην (4.2) με αντίστοιχα δεύτερα μέρη του συστήματος (0.1), και έτσι θα καταλήξουμε στην σχέση

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_k}\Phi_k.$$

Απόδειξη (του θεωρήματος *Lyapunov*). Με Σ_c θα συμβολίσουμε το σύνολο των σημείων $\mathbf{x}$ στα οποία $\mathcal{V} \leq c$:

$$\Sigma_c = \{\mathbf{x} : \mathcal{V}(\mathbf{x}) \leq c\}.$$

Επίσης με B_ε και με B_δ θα συμβολίσουμε μπάλες με κέντρο στο μηδέν και ακτίνα ε και δ αντιστοίχως:

$$B_\varepsilon = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| \leq \varepsilon\}, \quad B_\delta = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| \leq \delta\}.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\mathcal{V}(0) = 0$ είναι γνήσιο ελάχιστο, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν c και $\delta > 0$ τέτοιοι ώστε

$$B_\delta \subset \Sigma_c \subset B_\varepsilon,$$

προφανώς $\delta < c < \varepsilon$. Για τα σημεία $\mathbf{x} \in B_\delta$ ισχύει ότι $\mathcal{V}(\mathbf{x}) < c$. Διαλέγουμε το αρχικό σημείο $\mathbf{x}(t_0)$ να ανήκει στην δ-περιοχή του $\mathbf{x} = 0$, δηλαδή

$$|\mathbf{x}(t_0)| \leq \delta$$

και έχουμε

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}(t_0)) < c.$$

Επειδή η συνάρτηση $\mathcal{V}$, σύμφωνα με την συνθήκη (4.1), δεν αυξάνει κατά μήκος οποιασδήποτε τροχιάς, άρα

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) < c \ \ \forall t \geq t_0,$$

που σημαίνει ότι η $\mathbf{x}(t)$ δεν μπορεί να βγεί εκτός του Σ_c συνεπώς και εκτός της μπάλας B_ε, δηλαδή

$$|\mathbf{x}(t)| < \varepsilon \ \ \forall t \geq t_0.$$

□

Παράδειγμα 4.1. Θεωρούμε το εξής σύστημα

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$$

αν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ είναι συντηρητικό και το δυναμικό του η συνάρτηση $\phi(\mathbf{x})$ στο 0 έχει γνήσιο μέγιστο, τότε η συνάρτηση *Lyapunov* είναι η

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \phi(0) - \phi(\mathbf{x})$$

και το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές.

Πράγματι, $\mathcal{V}(0) = 0$, $\mathcal{V}(x) > 0$ για $x \neq 0$ και

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\Big)^2 \leq 0.$$

Εδώ (αφού $\nabla\phi = \mathbf{\Phi}$ και $x_i' = \Phi_i = \phi_{x_i}$).

Παράδειγμα 4.2. Θεωρούμε το εξής σύστημα

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = 1, ..., n.$$

όπου $a_{ij}(t) = -a_{ji}(t)$ για $i \neq j$ και $a_{ii}(t) \leq 0$. Η συνάρτηση *Lyapunov* σε αυτή τη περίπτωση είναι η

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

και το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές.

Πράγματι, $\mathcal{V}(\mathbf{0}) = 0$, $\mathcal{V}(x) > 0$ για $x \neq 0$ και

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{dx_i}{dt} = 2\sum_{i} a_{ii}(t)x_i^2 \leq 0.$$

Θεώρημα 4.2 *Lyapunov* (ασυμπτωτικής ευστάθειας). *Αν ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 4.1, και επιπλέον για κάθε $\delta_0 > 0$ υπάρχει μια σταθερά $\beta > 0$ τ.ω.*

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} \leq -\beta < 0 \ \ \textit{για} \ \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq \delta_0^2 > 0, \ \ t \geq t_0, \tag{4.3}$$

τότε το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x} \equiv 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη. Η η λύση $\mathbf{x} \equiv 0$ είναι ευσταθής, δηλαδή $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|\mathbf{x}(t)| < \varepsilon \ \ \forall t \geq t_0 \ \ \text{αν} \ \ |\mathbf{x}(t_0)| < \delta.$$

Λόγω της (4.1) η $\mathcal{V}$ μονοτονικά φθίνει κατά μήκος της τροχιάς, άρα

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) = \alpha \geq 0.$$

Θα δούμε ότι $\alpha = 0$. Έστω $\alpha > 0$, άρα η τροχιά βρίσκεται στην περιοχή $\mathcal{V} \geq \alpha > 0$ για όλα τα $t \geq T_0$ για κάποιο $T_0 \geq t_0$. Σε αυτή τη περιοχή η $\mathcal{V}$ ικανοποιεί την συνθήκη (4.3), άρα

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} \leq -\beta < 0 \ \ \text{για} \ \ t \geq T_0.$$

Ολοκληρώνοντας αυτή την ανισότητα από T_0 έως t, παίρνουμε

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathcal{V}(\mathbf{x}(T_0)) - \beta(t - T_0). \tag{4.4}$$

Παίρνοντας το t αρκετά μεγάλο βλέπουμε ότι το δεξί μέρος της (4.4) γίνεται αρνητικό και επομένως $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$, όπου αυτό έρχεται σε αντίθεση με την προϋπόθεση ότι $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) > 0$. Συνεπώς $\alpha = 0$. Όμως υπάρχει μόνο ένα σημείο, στο οποίο μηδενίζεται η $\mathcal{V}$, είναι το σημείο $\mathbf{x} = 0$. Συνεπώς

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0,$$

δηλαδή το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x} \equiv 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
□

Παράδειγμα 4.3. Εξετάστε αν είναι ασταθές ή ευσταθές το σημείο ισορροπίας του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = -y^2 x + y^3,$$
$$\frac{dy}{dt} = -x^3 - y^3 x^4.$$

Λύση. Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση *Lyapunov*. Θέλουμε η $\mathcal{V}$ να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\mathcal{V} > 0 \ \ \text{για} \ \ (x, y) \neq (0, 0), \ \ \mathcal{V}(0, 0) = 0 \ \ \text{και} \ \ \frac{d\mathcal{V}}{dt} \leq 0.$$

Αφού

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_k} \Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n) \leq 0$$

οι μερικές παράγωγοι της $\mathcal{V}$ πρέπει να ικανοποιούν την σχέση

$$\mathcal{V}_x(-y^2 x + y^3) + \mathcal{V}_y(-x^3 - y^3 x^4) \leq 0.$$

Διαλέγοντας $\mathcal{V}_x = x^3$, $\mathcal{V}_y = y^3$ λαμβάνουμε

$$x^3(-y^2 x + y^3) + y^3(-x^3 - y^3 x^4) = -y^2 x^4 - y^6 x^4 \leq 0.$$

Άρα η

$$\mathcal{V}(x,y) = (x^4 + y^4)/4$$

θα είναι η ζητούμενη συνάρτηση $Lyapunov$. Πράγματι $\mathcal{V}(0,0) = 0$, $\mathcal{V} > 0$ αν $(x,y) \neq (0,0)$ και

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \mathcal{V}_x(-y^2x + y^3) + \mathcal{V}_y(-x^3 - y^3x^4) = -y^2x^4(1 + y^2) \leq 0.$$

Άρα το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές, επειδή όμως η $\frac{d\mathcal{V}}{dt}$ μηδενίζεται όχι μόνο στο σημείο $(0,0)$ συνεπώς το Θεώρημα 4.2 δεν μας εξασφαλίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια.

Παράδειγμα 4.4. Να δειχθεί ότι το σημείο ισορροπίας του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = -x - xy^2,$$
$$\frac{dy}{dt} = -y - x^2y$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Λύση. Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση $Lyapunov$ της μορφής

$$\mathcal{V}(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Είναι γνωστό ότι για να είναι θετικά ορισμένη μια τετραγωνική συνάρτηση θα πρέπει οι συντελεστές a, b, c να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$a > 0, \quad 4ac - b^2 > 0.$$

Έχουμε

$$\mathcal{V}_x = 2ax + by, \quad \mathcal{V}_y = bx + 2cy,$$

άρα

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = (2ax + by)(-x - xy^2) + (bx + 2cy)(-y - x^2y) =$$
$$= -[2a(x^2 + x^2y^2) + b(2xy + xy^3 + x^3y) + 2c(y^2 + x^2y^2)].$$

Αν επιλέξουμε $b = 0$ και $a = c = 1/2$, τότε

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = -[x^2 + 2x^2y^2 + y^2] \leq 0, \quad \mathcal{V} = \frac{x^2 + y^2}{2} \geq 0,$$
$$\mathcal{V}(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Αρα το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές.

Επίσης αν

$$x^2 + y^2 \geq \delta_0^2,$$

τότε

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} \leq -\beta \;\text{ με }\; \beta = \delta_0^2.$$

Άρα το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα 4.5. Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας για το σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = y,$$
$$\frac{dy}{dt} = -y^2 - 2y.$$

Λύση. Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση

$$\mathcal{V} = x^2 + xy + y^2,$$

είναι συνάρτηση $Lyapunov$. Προφανώς $\mathcal{V} \geq 0$ και $\mathcal{V} = 0$ μόνο στο σημείο $(0,0)$, άρα αρκεί ναι βεβαιωθούμε ότι ισχύει η ανισότητα (4.1).

Έχουμε

$$\mathcal{V}_x y + \mathcal{V}_y(-y^2 - y) =$$

$$(2x+y)y - (x+2y)(y^2+2y) = -3y^2 - xy^2 - 2y^3 = -y^2(3+x+2y).$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $3+x+2y \geq 0$ αν $x^2+y^2 < 1$ συνεπώς

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} \leq 0$$

στην ϵ περιοχή του $(0,0)$ με $\epsilon = 1$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{d\mathcal{V}}{dt} = 0$ όχι μόνο στο $(x,y) = (0,0)$, δηλαδή για $x^2+y^2 > \delta$ όσο μικρό και να είναι το δ μπορούμε να εχουμε $\frac{d\mathcal{V}}{dt} = 0$ (π.χ. $x > \delta$ και $y = 0$). Άρα το Θεώρημα 4.2 δεν μας εξασφαλίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια.

Μπορούμε με απλό τρόπο να διαπιστώσουμε ότι ασυμπτωτική ευστάθεια δεν υφίσταται σε αυτή την περίπτωση. Πράγματι η σταθερή συνάρτηση $\phi = (\gamma, 0)$ είναι λύση (και το γ μπορέι να είναι όσο θέλουμε μικρό). Προφανώς

$$\lim_{t\to\infty} |\phi| = |\gamma| \neq 0.$$

Παράδειγμα 4.6. Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας για το σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = -x + \frac{x^3}{2} + xy^2,$$
$$\frac{dy}{dt} = -y + \frac{y^3}{2} + y(2 - e^t).$$

Λύση. Θα αποδείξουμε οτι η συνάρτηση

$$\mathcal{V} = x^2 + y^2,$$

είναι συνάρτηση $Lyapunov$. Προφανώς $\mathcal{V} \geq 0$ και $\mathcal{V} = 0$ μόνο στο σημείο $(0,0)$. Παρατηρούμε ότι η ανισότητα (4.1) πρέπει να ισχύει μόνο για $t \geq t_0$ για κάποιο t_0. Έχουμε

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = 2x(-x + \frac{x^3}{2} + xy^2) + 2y(-y + \frac{y^3}{2} + y(2 - e^t)) =$$

$$-2(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2 + 2y^2(2-e^t).$$

Προφανώς για

$$x^2 + y^2 \leq 2 = \epsilon$$

έχουμε ότι

$$-2(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2 \leq 0$$

και για $t \geq t_0 = \ln 2$ ισχύει ότι $2 - e^t \leq 0$. Αφού

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} \leq 0$$

για $t \geq \ln 2$ και $x^2 + y^2 \leq 2$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές. Αρα η $v = x^2 + y^2$ είναι συνάρτηση $Lyapunov$.

Η ασυμπτωτική ευστάθεια αποδεικνύεται όπως στο Παράδειγμα 4.4.

Παράδειγμα 4.7. Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας για την εξίσωση (μαθηματικό εκκρεμές)

$$x'' + sinx = 0.$$

Λύση. Ανάγουμε την εξίσωση σε σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x.$$

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}y^2 + 1 - \cos x,$$

είναι συνάρτηση $Lyapunov$. Προφανώς $\cos x = 1$ μόνο για $x = 0,\ 2\pi k,\ k = 1, 2, \ldots$. Συνεπώς, αν πάρουμε, π.χ., $\epsilon = 1$, τότε στην ϵ περιοχή του σημείου $(0,\ 0)$ ισχύει ότι $\mathcal{V} \geq 0$ και $\mathcal{V} = 0$ μόνο στο $(0, 0)$. Πρέπει να βεβαιωθούμε ότι ισχύει η (4.1). Έχουμε

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \mathcal{V}_x y + \mathcal{V}_y(-\sin x) = 0.$$

Άρα το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές.

⋆

Τέλος, θα κάνουμε την εξής παρατήρηση, στο Θεωρήματα 4.1, 4.2, η συνάρτηση $\mathcal{V}$ μπορεί να εξαρτάται από την μεταβλητή t, σε αυτήν την περίπτωση η συνθήκη *1.* του θεωρήματος πρέπει να αντικατασταθεί με την ακόλουθη

*1**, $\mathcal{V}(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x})$, όπου η συνεχής συνάρτηση $W(\mathbf{x})$ έχει γνήσιο ελάχιστο στο σημείο $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και $\mathcal{V}(t, \mathbf{0}) = W(\mathbf{0}) = 0$,

επιπλέον η συνθήκη *2.* έχει τη μορφή

*2.**

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} \leq 0.$$

Η απόδειξη ουσιαστικά παραμένει η ίδια.